# 6. Estimación de la incertidumbre en las mediciones de temperatura

Extracto del libro:

Termometría de contacto: Una referencia práctica para la medición de temperatura en el laboratorio y en la industria.
Autor: Víctor Martínez Fuentes
ISBN: 978-1-520-41901-5
ASIN: B01MRV13KA

Los sistemas de calidad en todas las industrias han creado la necesidad de evaluar la incertidumbre de la medición para evaluar la conformidad de productos y procesos. La misma necesidad se había presentado en la comunidad científica, donde ya se tenía mucho trabajo en ello, pero no fue sino hasta 1993 que se dieron los medios para que fuera aceptada una forma ampliamente aceptada de estimarla y expresarla. En 1993 se publicó el documento de referencia para la expresión de la incertidumbre en las mediciones y este es la *Guide to the Expression of Uncertainty Measurement.* En 2008 se publicó una revisión. Esta guía se conoce como la GUM y esta publicada por la ISO/IEC.

Las estimaciones de incertidumbre en las mediciones de temperatura se basarán completamente en la GUM a menos que se declare lo contrario dentro de alguna técnica de medición de temperatura en particular.

En las páginas siguientes se exponen ocho pasos del procedimiento recomendado por la GUM para la estimación de incertidumbres.

## 6.1 Procedimiento para la evaluación y expresión de la incertidumbre

Este un procedimiento general que aplica a de mediciones de cualquier magnitud.

Los pasos por seguir para evaluar y expresar la incertidumbre de los resultados de una medición como se presentan en la *GUM* se resumen como sigue:

**i. Expresar matemáticamente la relación entre el mensurando *Y* y los argumentos $X_i$ de los cuales depende *Y*: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$.**

La función *f* deberá contener todas las magnitudes de las cuales depende incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que puedan contribuir como componentes significativos de incertidumbre al resultado de la medición. Es aquí donde se introduce el modelo que relaciona la temperatura con la variable termométrica del termómetro en cuestión. En algunos casos se incluyen las correcciones que se realizan a las mediciones por diversos factores.

La relación entre las magnitudes de entrada y el mensurando *Y* como la magnitud de salida se representa como una función

$$Y = f(\{X_i\}) = f(X_1, X_2, \dots , X_N) \qquad (6.1)$$

representada por una tabla de valores correspondientes, una gráfica o una ecuación, en cuyo caso y para los fines de este documento se hará referencia a una relación funcional.

**ii. Determinar $x_i$, el valor estimado del argumento $X_i$,**

ya sea sobre la base del análisis estadístico de una serie de observaciones o por otro método.

$X_i$ incluye la mejor estimación del valor del mensurando y una estimación de la incertidumbre sobre ese valor.

El mejor estimado del valor del mensurando es el resultado de calcular el valor de la función *f* evaluada en el mejor estimado de cada magnitud de entrada,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \qquad (6.2)$$

En algunas ocasiones se toma el mejor estimado de *Y* como el promedio de varios valores $y_j$ del mensurando obtenidos a partir de diversos conjuntos de valores $(X_i)_j$ de las magnitudes de entrada

### iii. Evaluar la *incertidumbre estándar* $u(x_i)$ de cada estimación *x*.

Antes de comparar y combinar las contribuciones de incertidumbre que tienen distribuciones diferentes, es necesario representar los valores de las incertidumbres originales como incertidumbres estándar.

Se emplea el método de evaluación de incertidumbres estándar Tipo A en la estimación del valor de una magnitud de entrada obtenida a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones de tal estimación. Para el caso de una estimación obtenida por otros métodos, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ se utiliza el método de evaluación de incertidumbres estándar Tipo B.

**Evaluación tipo A**

La incertidumbre de una magnitud de entrada $X_i$ obtenida a partir de observaciones repetidas bajo condiciones de repetibilidad, se estima con base en la dispersión de los resultados individuales.

Si $X_i$ se determina por *n* mediciones independientes, resultando en valores $q_1$, $q_2$, ... , $q_n$, el mejor estimado $x_i$ para el valor de $X_i$ es la media de los resultados individuales:

$$x_i = \bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \tag{6.3}$$

La dispersión de los resultados de la medición $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ para la magnitud de entrada $X_i$ se expresa por su desviación estándar experimental:

$$s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2} \tag{6.4}$$

La incertidumbre estándar $u(x_i)$ de $x_i$ se obtiene finalmente mediante el cálculo de la desviación estándar experimental de la media:

$$u(x_i) = s(\bar{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \tag{6.5}$$

Así que resulta para la incertidumbre estándar de $X_i$:

$$u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2} \tag{6.6}$$

Otras fuentes de incertidumbre que se evalúan con este método son la reproducibilidad y las obtenidas al hacer una regresión.

**Evaluación tipo B**

Las fuentes de incertidumbre tipo B son cuantificadas usando información externa u obtenida por experiencia. Estas fuentes de información pueden ser:

- Certificados o informes de calibración, o certificados de materiales de referencia o informes de caracterización, etc.
- Manuales del instrumento de medición, especificaciones del instrumento.
- Normas o literatura.
- Valores de mediciones anteriores.
- Conocimiento sobre las características o el comportamiento del sistema de medición.
- Evaluación de condiciones en que la medición se llevó a cabo.

Para ello se determina la desviación estándar de la distribución asignada a cada fuente.

*i. Distribución normal:*

La desviación estándar experimental de la media calculada a partir de los resultados de una medición repetida representa la incertidumbre estándar.

Cuando se dispone de valores de una incertidumbre expandida *U*, como los presentados por ejemplo en certificados o informes de calibración, se divide *U* entre el factor de cobertura *k,* obtenido ya sea directamente o a partir de un nivel de confianza dado:

$$u(x_i) = \frac{U}{k} \tag{6.7}$$

### *ii. Distribución rectangular:*

Si la magnitud de entrada $X_i$ tiene una distribución rectangular con el límite superior $a_+$ y el límite inferior $a_-$, el mejor estimado para el valor de $X_i$ está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{6.8}$$

y la incertidumbre estándar se calcula por

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}} \tag{6.9}$$

o por

$$u(x_i) = \frac{a/2}{\sqrt{3}} \tag{6.10}$$

donde *a/2* es el semi-intervalo del intervalo $a$ con

$$a = a_+ - a_- \tag{6.11}$$

Una aplicación típica es la resolución de un instrumento digital (ver más adelante). También la incertidumbre relacionada con el número finito de cifras significativas de datos tomados de la literatura se puede tratar con esta distribución (siempre y cuando no haya indicios que la incertidumbre en realidad es mayor que la incertidumbre relacionada con la última cifra significativa). Si se aplica a la resolución o a datos tomados de la literatura, *a* corresponde al último dígito significativo o a la última cifra significativa respectivamente.

### *iii. Distribución triangular:*

Como en una distribución rectangular, para una magnitud de entrada $X_i$ que tiene una distribución triangular con los límites $a_+$ y $a_-$, el mejor estimado para el valor de $X_i$ está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{6.12}$$

La incertidumbre estándar se calcula en este caso por:

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{24}} = \frac{a/2}{\sqrt{6}} \tag{6.13}$$

con $a$ como definido arriba.

*Resolución de un indicador digital.*

Si la resolución del dispositivo indicador es $\delta x$, el valor del estímulo que produce una indicación $X$ dada puede localizarse con igual probabilidad en cualquier lugar en el intervalo de $X - \delta x/2$ a $X + \delta x/2$. El estímulo se describe entonces mediante una distribución de probabilidad rectangular de anchura $\delta x$ con varianza $u^2 = (\delta x)^2/12$, implicando una incertidumbre estándar de $u = 0.29\ \delta x$ para cualquier indicación.

*Histéresis*

Ciertos tipos de histéresis pueden causar un tipo similar de incertidumbre. La indicación de un instrumento puede diferir por una cierta magnitud fija y conocida dependiendo de si las sucesivas lecturas son de valores progresivamente mayores o progresivamente menores. Sin embargo, la dirección de la histéresis no es siempre observable: pueden existir oscilaciones ocultas en el instrumento alrededor de un punto de equilibrio, de tal manera que la lectura depende de la dirección desde la cual se realiza la aproximación a este punto. Si el intervalo de posibles lecturas originado por este motivo es *δx*, la varianza es, nuevamente, $u^2 = (\delta x)^2/12$, y la incertidumbre estándar debido a la histéresis es $u = 0.29\ \delta x$.

### iv. Evaluar las covarianzas asociadas

Evaluar las covarianzas asociadas con cualesquiera estimaciones de los argumentos que estén correlacionadas.

Dos variables son independientes cuando la probabilidad asociada a una de ellas no depende de la otra, esto es, si $q$ y $w$ son dos variables aleatorias independientes, la probabilidad conjunta se expresa como el producto de las probabilidades de las variables respectivas.

$$p(q, w) = p(q)p(w) \tag{6.14}$$

Es común que se encuentran magnitudes de entrada que no sean independientes. La independencia lineal de dos variables puede estimarse estadísticamente con el coeficiente de correlación.

$$r(q, w) = \frac{u(q,w)}{u(q)u(w)} \tag{6.15}$$

En el denominador son las incertidumbres estándar de las variables referidas y en el numerador la covarianza de las mismas.

La covarianza se puede estimar como:

$$u(q, w) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})(w_k - \bar{w}) \tag{6.16}$$

Un valor de $r = 0$ indica independencia de $q$ y $w$. Los valores de $r = +1$ o $-1$ indican una correlación total.

### v. Calcular el resultado de la medición.

esto es, la estimación *y* del mensurando *Y*, a partir de la relación funcional *f* usando, para los argumentos $X_i$, las estimaciones $x_i$ obtenidas en el paso ii.

**vi. Determinar la *incertidumbre estándar combinada* $u_c$(*y*) del resultado de la medición *y***

a partir de las incertidumbres estándar y las covarianzas asociadas con las estimaciones $x_i$. Si la medición determina simultáneamente más de un resultado, calcule sus covarianzas

La contribución $u_i(y)$ de cada fuente a la incertidumbre combinada depende de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la propia fuente y del impacto de la fuente sobre el mensurando.

En el caso de magnitudes de entrada no correlacionadas, la incertidumbre combinada $u_c(y)$ se calcula por la suma geométrica de las contribuciones particulares:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial X_i} u(x_i)\right]} \tag{6.17}$$

Si la influencia de la magnitud de entrada $X_i$ en el mensurando *Y* no está claramente representada por una relación funcional, la derivada parcial de la función con respecto a la magnitud de entrada $X_i$ (coeficiente de sensibilidad) se puede aproximar como:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \tag{6.18}$$

lo cual es una primera aproximación.

Si algunas de las magnitudes de entrada están correlacionadas, hay que considerar las covarianzas entre ellas y entonces se tiene

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial X_i}u(x_i)\right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}u(x_i)u(x_j)r(X_i, X_j)}$$

(6.19)

donde $r(X_i , X_j)$ es el factor de correlación entre las magnitudes de entrada $X_i$ y $X_j$.

**vii. Si es necesario declarar una *incertidumbre expandida U***

cuyo propósito sea establecer un intervalo de $y - U$ a $y + U$ que se espera que abarque una fracción grande de la distribución de los valores que razonablemente se puedan atribuir al mesurando $Y$, multiplíquese a la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por un *factor de cobertura k*, típicamente con valores en el intervalo de 2 a 3, para obtener $U = ku_c(y)$. Seleccione $k$ sobre la base del nivel de confianza requerido para el intervalo

En el medio industrial, a menudo se elige el nivel de confianza de manera tal que corresponda a un factor de cobertura como un número entero de desviaciones estándar en una distribución normal.

De manera rigurosa la incertidumbre expandida se calcula de acuerdo con la ec. Como

$$U = u_c t_p(\nu_{ef}) \tag{6.20}$$

donde $t_p(\nu_{ef})$ es el factor derivado de la distribución *t* de *Student* a un nivel de confianza $p$ y $\nu_{ef}$ grados de libertad y obtenido de tablas o funciones estadísticas.

El Teorema del Límite Central permite aproximar la distribución resultante por una distribución normal cuando se combinan varias fuentes de incertidumbre con sus respectivas distribuciones.

El número efectivo de grados de libertad $\nu_{ef}$ del mensurando considera el número de grados de libertad $\nu_i$ de cada fuente de incertidumbre.

Los grados de libertad para una incertidumbre tipo A son $\nu = N-1$

La determinación del número de grados de libertad de una incertidumbre tipo B está dada por:

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x_i)}{\Delta u(x_i)}\right]^{2} \qquad (6.21)$$

La cantidad $\Delta u(x_i)$ es una estimación de la incertidumbre de la incertidumbre $u(x_i)$ de la fuente.

El número efectivo de grados de libertad se calcula según la ecuación de Welch-Satterthwaite:

$$\nu_{ef} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad (6.22)$$

Si el valor de $\nu_{ef}$ resultante no es entero, generalmente se considera $\nu_{ef}$ como el entero menor más próximo.

Los valores de $t_p(\nu_{ef})$ para p = 95.45% se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 6.1 valores de $t_p$ dados los grados de libertad para un nivel de confianza de p = 95.45%

| n | $t_p(v_{ef})$ |
|---|---|
| **1** | 13.97 |
| **2** | 4.53 |
| **3** | 3.31 |
| **4** | 2.87 |
| **5** | 2.65 |
| **6** | 2.52 |
| **7** | 2.43 |
| **8** | 2.37 |
| **9** | 2.32 |
| **10** | 2.28 |
| **20** | 2.13 |
| **50** | 2.05 |
| **100** | 2.025 |
| **∞** | 2.000 |

**viii. Informar del resultado de la medición *y* junto con su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ o su incertidumbre expandida *U*.**

Descríbase, cómo se obtuvieron *y* y $u_c(y)$ o *U*.

## 6.2 Métodos Numéricos para la Propagación de Distribuciones

¿Cuándo se usan?

Aunque es un método general, se usa para modelos complicados o para modelos con cantidades de entrada con incertidumbres grandes o