Extracto del libro: Metrología. Una referencia práctica a tu medida. Autor: Víctor Martínez Fuentes
ASIN: B075J7HSLP

3.1 PROCEDIMIENTO PARA LA EVALUACIÓN Y EXPRESIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Anteriormente no existía un consenso para expresar la incertidumbre en la metrología. Por 1977 el BIPM empezó a tomar cartas en el asunto y se formó un grupo de trabajo formado por seis organizaciones internacionales: BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML. En 1995 se publicó la *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, conocida como GUM. En México un equivalente de esa guía es la norma NMX-CH-140-IMNC-2002, Guía para la expresión de la incertidumbre de las mediciones.

Desde su publicación en 1995, la GUM constituye la referencia necesaria en cada instancia o publicación en la que se habla de la incertidumbre. Fue un momento importante en la historia de la metrología debido a la reflexión sobre el concepto de la incertidumbre y de cómo evaluarla estadísticamente ofreciendo un método relativamente consensuado.

Los pasos por seguir para evaluar y expresar la incertidumbre de los resultados de una medición como se presentan en la *GUM* se resumen como sigue:

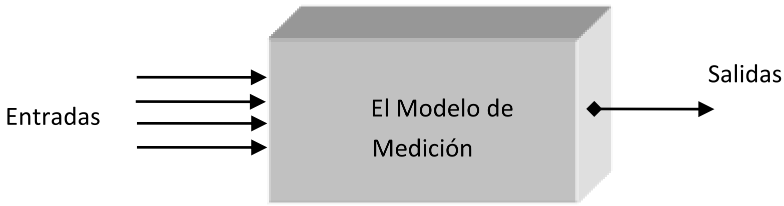
Este un procedimiento general que aplica a mediciones de cualquier magnitud.

i. **Expresar matemáticamente la relación entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de los cuales depende Y: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$.**

En cualquier medición debe establecerse claramente y sin ambigüedades el mensurando: la magnitud final de interés. Para determinar la magnitud se requiere de magnitudes medidas directamente como aquellas magnitudes que se determinan de estimados que pudieron o no haberse medido directamente.

Se necesita establecer un modelo de medición para estimar los valores sujetos a mediciones indirectas. El modelo, que debe describir lo más fiel la física involucrada, puede escribirse explícitamente en términos de una o más fórmulas matemáticas o puede ser un algoritmo.

Se puede pensar, el modelo de medición, como una caja negra con entradas y salidas. Algunas veces, las magnitudes de entrada no las mide directamente el interesado, sino que ocupa valores encontrados por otros. La salida puede ser otra magnitud que se ocupe en otro proceso más adelante.



Aún el modelo más simple estará incompleto si no se toman en cuenta correcciones a las indicaciones de los instrumentos usados para medición directa.

La primera tarea para estimar el valor del estimando es reemplazar los valores estimados en el modelo en las magnitudes de entrada. La segunda parte consiste en determinar la incertidumbre de la medición. El evaluador de la incertidumbre debe estar seguro de que el modelo es correcto y que aplica a los valores estimados de las magnitudes de entrada.

La función f deberá contener todas las magnitudes de las cuales depende incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que puedan contribuir como componentes significativos de incertidumbre al resultado de la medición. En algunos casos se incluyen las correcciones que se realizan a las mediciones por diversos factores.

La relación entre las magnitudes de entrada y el mensurando Y como la magnitud de salida se representa como una función

$$Y = f(\{X_i\}) = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \qquad (1)$$

representada por una tabla de valores correspondientes, una gráfica o una ecuación, en cuyo caso y para los fines de este documento se hará referencia a una relación funcional.

ii. Determinar x_i, el valor estimado de la magnitud de entrada X_i,

ya sea sobre la base del análisis estadístico de una serie de observaciones, como el promedio, o por otro método.

X_i incluye la mejor estimación del valor del mensurando y una estimación de la incertidumbre sobre ese valor.

El mejor estimado del valor del mensurando es el resultado de calcular el valor de la función f evaluada en el mejor estimado de cada magnitud de entrada,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \qquad (2)$$

En algunas ocasiones se toma el mejor estimado de Y como el promedio de varios valores y_j del mensurando obtenidos a partir de diversos conjuntos de valores $(X_i)_j$ de las magnitudes de entrada

iii. Evaluar la *incertidumbre estándar* $u(x_i)$ de cada estimación de magnitud de entrada *x*.

Antes de comparar y combinar las contribuciones de incertidumbre que tienen distribuciones diferentes, es necesario representar los valores de las incertidumbres originales como incertidumbres estándar.

Se emplea el método de evaluación de incertidumbres estándar Tipo A en la estimación del valor de una magnitud de entrada obtenida a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones de tal estimación. Para el caso de una estimación obtenida por otros métodos, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ se utiliza el método de evaluación de incertidumbres estándar Tipo B.

Evaluación tipo A

La incertidumbre de una magnitud de entrada *Xi* obtenida a partir de observaciones repetidas bajo condiciones de repetibilidad, se estima con base en la dispersión de los resultados individuales.

Si *Xi* se determina por *n* mediciones independientes, resultando en valores $q_1, q_2, \ldots, q_n$, el mejor estimado x_i para el valor de *Xi* es la media de los resultados individuales:

$$x_i = \bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \qquad (3)$$

La dispersión de los resultados de la medición $q_1, q_2, \ldots, q_n$ para la magnitud de entrada *Xi* se expresa por su desviación estándar experimental:

$$s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2} \qquad (4)$$

La incertidumbre estándar *u(xi)* de *xi* se obtiene finalmente mediante el cálculo de la desviación estándar experimental de la media:

$$u(x_i) = s(\bar{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

Así que resulta para la incertidumbre estándar de X_i:

$$u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2} \tag{6}$$

Otras fuentes de incertidumbre que se evalúan con este método son la reproducibilidad y las obtenidas al hacer una regresión.

Evaluación tipo B

Las fuentes de incertidumbre tipo B son cuantificadas usando información externa u obtenida por experiencia. Estas fuentes de información pueden ser:

- Certificados o informes de calibración, o certificados de materiales de referencia o informes de caracterización, etc.
- Manuales del instrumento de medición, especificaciones del instrumento.
- Normas o literatura.
- Valores de mediciones anteriores.
- Conocimiento sobre las características o el comportamiento del sistema de medición.
- Evaluación de condiciones en que la medición se llevó a cabo.

Para ello se determina la desviación estándar de la distribución asignada a cada fuente.

i. *Distribución normal:*

La desviación estándar experimental de la media calculada a partir de los resultados de una medición repetida representa la incertidumbre estándar.

Cuando se dispone de valores de una incertidumbre expandida *U*, como los presentados por ejemplo en certificados o informes de calibración, se divide *U* entre el factor de cobertura *k,* obtenido ya sea directamente o a partir de un nivel de confianza dado:

$$u(x_i) = \frac{U}{k} \tag{7}$$

ii. Distribución rectangular:

Si la magnitud de entrada X_i tiene una distribución rectangular con el límite superior a_+ y el límite inferior a_-, el mejor estimado para el valor de X_i está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{8}$$

y la incertidumbre estándar se calcula por

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}} \tag{9}$$

o por

$$u(x_i) = \frac{a/2}{\sqrt{3}} \tag{10}$$

donde *a/2* es el semi-intervalo del intervalo *a* con

$$a = a_+ - a_- \tag{11}$$

Una aplicación típica es la resolución de un instrumento digital (ver más adelante). También la incertidumbre relacionada con el número finito de cifras significativas de datos tomados de la literatura se puede tratar con esta distribución (siempre y cuando no haya indicios que la incertidumbre en realidad es mayor que la incertidumbre relacionada con la última cifra significativa). Si se aplica a la resolución o a datos tomados de la literatura, *a* corresponde al último dígito significativo o a la última cifra significativa respectivamente.

iii. Distribución triangular:

Como en una distribución rectangular, para una magnitud de entrada X_i que tiene una distribución triangular con los límites a_+ y a_-, el mejor estimado para el valor de X_i está dado por:

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \tag{12}$$

La incertidumbre estándar se calcula en este caso por:

$$u(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{24}} = \frac{a/2}{\sqrt{6}} \tag{13}$$

con a como definido arriba.

Resolución de un indicador digital.

Si la resolución del dispositivo indicador es δx, el valor del estímulo que produce una indicación X dada puede localizarse con igual probabilidad en cualquier lugar en el intervalo de X - $\delta x/2$ a $X + \delta x/2$. El estímulo se describe entonces mediante una distribución de probabilidad rectangular de anchura δx con varianza $u^2 = (\delta x)^2/12$, implicando una incertidumbre estándar de $u = 0.29\ \delta x$ para cualquier indicación.

Histéresis

Ciertos tipos de histéresis pueden causar un tipo similar de incertidumbre. La indicación de un instrumento puede diferir por una cierta magnitud fija y conocida dependiendo de si las sucesivas lecturas son de valores progresivamente mayores o progresivamente menores. Sin embargo, la dirección de la histéresis no es siempre observable: pueden existir oscilaciones ocultas en el instrumento alrededor de un punto de equilibrio, de tal manera que la lectura depende de la dirección desde la cual se realiza la aproximación a este punto. Si el intervalo de posibles lecturas originado por este motivo es δx, la varianza es, nuevamente, $u^2 = (\delta x)^2/12$, y la incertidumbre estándar debido a la histéresis es $u = 0.29\ \delta x$.

iv. Evaluar las covarianzas asociadas

Evaluar las covarianzas asociadas con cualesquiera estimaciones de los argumentos que estén correlacionadas.

Dos variables son independientes cuando la probabilidad asociada a una de ellas no depende de la otra, esto es, si q y w son dos variables aleatorias independientes, la probabilidad conjunta se expresa como el producto de las probabilidades de las variables respectivas.

$$p(q,w) = p(q)p(w) \tag{14}$$

Es común que se encuentran magnitudes de entrada que no sean independientes. La independencia lineal de dos variables puede estimarse estadísticamente con el coeficiente de correlación.

$$r(q,w) = \frac{u(q,w)}{u(q)u(w)} \tag{15}$$

En el denominador son las incertidumbres estándar de las variables referidas y en el numerador la covarianza de las mismas.

La covarianza se puede estimar como:

$$u(q,w) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(w_k - \bar{w})$$

(16)

Un valor de $r = 0$ indica independencia de q y w. Los valores de $r = +1$ o -1 indican una correlación total.

v. Calcular el resultado de la medición.

esto es, la estimación *y* del mensurando *Y*, a partir de la relación funcional *f* usando, para los argumentos X_i, las estimaciones x_i obtenidas en el paso ii.

vi. Determinar la *incertidumbre estándar combinada* $u_c(y)$ del resultado de la medición *y*

a partir de las incertidumbres estándar y las covarianzas asociadas con las estimaciones x_i. Si la medición determina simultáneamente más de un resultado, calcule sus covarianzas

La contribución $u_i(y)$ de cada fuente a la incertidumbre combinada depende de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la propia fuente y del impacto de la fuente sobre el mensurando.

En el caso de magnitudes de entrada no correlacionadas, la incertidumbre combinada $u_c(y)$ se calcula por la suma geométrica de las contribuciones particulares:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial X_i} u(x_i)\right]} \qquad (17)$$

Si la influencia de la magnitud de entrada X_i en el mensurando *Y* no está claramente representada por una relación funcional, la derivada parcial de la función con respecto a la magnitud de entrada X_i (coeficiente de sensibilidad) se puede aproximar como:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \qquad (18)$$

lo cual es una primera aproximación.

Si algunas de las magnitudes de entrada están correlacionadas, hay que considerar las covarianzas entre ellas y entonces se tiene

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial X_i}u(x_i)\right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}u(x_i)u(x_j)r(X_i,X_j)}$$

(19)

donde $r(X_i, X_j)$ es el factor de correlación entre las magnitudes de entrada X_i y X_j.

vii. Si es necesario declarar una *incertidumbre expandida U*

cuyo propósito sea establecer un intervalo de $y - U$ a $y + U$ que se espera que abarque una fracción grande de la distribución de los valores que razonablemente se puedan atribuir al mesurando *Y*, multiplíquese a la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por un *factor de cobertura k*, típicamente con valores en el intervalo de 2 a 3, para obtener $U = ku_c(y)$. Seleccione *k* sobre la base del nivel de confianza requerido para el intervalo

En el medio industrial, a menudo se elige el nivel de confianza de manera tal que corresponda a un factor de cobertura como un número entero de desviaciones estándar en una distribución normal.

De manera rigurosa la incertidumbre expandida se calcula de acuerdo a la ec. Como

$$U = u_c t_p(\nu_{ef}) \qquad (20)$$

donde $t_p(\nu_{ef})$ es el factor derivado de la distribución *t* de Student a un nivel de confianza *p* y ν_{ef} grados de libertad y obtenido de tablas o funciones estadísticas.

El Teorema del Límite Central permite aproximar la distribución resultante por una distribución normal cuando se combinan varias fuentes de incertidumbre con sus respectivas distribuciones.

El número efectivo de grados de libertad ν_{ef} del mensurando considera el número de grados de libertad ν_i de cada fuente de incertidumbre.

Los grados de libertad para una incertidumbre tipo A son $\nu = N-1$

La determinación del número de grados de libertad de una incertidumbre tipo B está dada por:

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x_i)}{\Delta u(x_i)}\right]^{2}$$

(21)

La cantidad $\Delta u(x_i)$ es una estimación de la incertidumbre de la incertidumbre $u(x_i)$ de la fuente.

El número efectivo de grados de libertad se calcula según la ecuación de Welch-Satterthwaite:

$$\nu_{ef} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

(22)

Si el valor de ν_{ef} resultante no es entero, generalmente se considera ν_{ef} como el entero menor más próximo.

Los valores de $t_p(\nu_{ef})$ para p = 95.45% se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 6. Valores de t_p dados los grados de libertad para un nivel de confianza de p = 95.45%

n	**$t_p(\nu_{ef})$**

1	13.97
2	4.53
3	3.31
4	2.87
5	2.65
6	2.52
7	2.43
8	2.37
9	2.32
10	2.28
20	2.13
50	2.05
100	2.025
∞	2.000

viii. Informar del resultado de la medición *y* junto con su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ o su incertidumbre expandida *U*.

Descríbase, cómo se obtuvieron *y* y $u_c(y)$ o *U*.

REFERENCIAS

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML (2008).
2. NMX-CH-140-IMNC-2002, Guía para la expresión de la incertidumbre de las mediciones; equivalente al documento Guide to the Expression of